

CONTAMINACIÓN EN CUERPOS DE AGUA DOMINADOS POR MAREAS: APLICACIÓN DEL METODO ESPECTRAL EN LA ECUACIÓN ADJUNTA DEL PROBLEMA DE TRANSPORTE DE SUSTANCIAS

Cecilia I. Stoklas^a, Víctor H. Cortínez^{a,b,c} y Patricia N. Dominguez^{a,b}

^a *Centro de Investigaciones en Mecánica Teórica y Aplicada, Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Bahía Blanca, 11 de Abril 461, 8000 Bahía Blanca, Buenos Aires, Argentina, vcortine@frbb.utn.edu.ar, stoklas@frbb.utn.edu.ar*

^b *Departamento de Ingeniería, Universidad Nacional del Sur, Av. Alem 1253, 8000 Bahía Blanca, Buenos Aires, Argentina. pdoming@uns.edu.ar*

^c *Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas, CONICET.*

Palabras Clave: Enfoque Adjunto al Problema de Transporte, Método Espectral, Diseño Óptimo, Método de Elementos Finitos.

Resumen. La descarga no controlada de efluentes en cuerpos de agua puede afectar los niveles de calidad de éstas. Resulta conveniente efectuar predicciones sobre la variación de tales niveles en determinadas zonas de interés, y evitar así situaciones críticas que deban luego ser remediadas. Se plantea un problema de diseño óptimo, aplicado a estuarios dominados por marea, bajo un procedimiento matemático que establece objetivos y restricciones tanto del punto de vista ambiental como económico. Considerando el importante grado de carga computacional necesario para desarrollar esta tarea, se propone un enfoque basado en el Método Espectral aplicado a las ecuaciones adjuntas del problema de dispersión de contaminantes. La combinación de ambas técnicas resulta ser considerablemente efectiva para abordar una amplia clase de problemas de diseño en ingeniería ambiental. Tal metodología se implementa numéricamente mediante el método de elementos finitos en el programa de simulación FlexPDE. Dicha simulación se combina con un método de optimización, desarrollado bajo un ambiente de programación en Matlab, que permite tomar las decisiones adecuadas en forma automática. Se dan ejemplos numéricos para ilustrar sobre la conveniencia de la metodología presentada.

1 INTRODUCCIÓN

Generalmente, los efluentes de origen domiciliario son tratados en plantas de depuración y descargados en cuerpos de agua aledaños mediante tuberías o emisarios submarinos. Sin embargo, muchas veces los niveles de concentración de éstos superan la capacidad de resiliencia del medio natural receptor ocasionando un impacto negativo sobre el mismo. Es por ello que deben realizarse estudios de impacto ambiental dirigidos a evitar o reducir daños que pueden sufrir tanto los sistemas ecológicos como humanos. Una forma factible de hacerlo es empleando herramientas de predicción sobre la variación de los indicadores de calidad de aguas en determinadas zonas de interés y evitar así situaciones críticas que deban luego ser remediadas. El desarrollo de las técnicas computacionales ha permitido que los modelos matemáticos se conviertan en una herramienta cualitativa y cuantitativamente eficiente para tal estudio. Para realizar un diseño adecuado, es necesario determinar un procedimiento matemático que establezca objetivos y restricciones tanto del punto de vista ambiental como económico, y luego plantear un método adecuado para la estimación de dichas restricciones que permita tomar las decisiones adecuadas en forma automática. Esto lleva al concepto de diseño óptimo. Consiste en simular diferentes escenarios posibles futuros, seguido por un proceso de selección de aquel que resulte más conveniente respecto de los objetivos propuestos. La definición adecuada de los objetivos, va a responder a un juicio de valor sobre la importancia relativa de los aspectos económicos y ambientales puestos en juego. Por ejemplo, se puede establecer minimizar costos y asegurar a su vez condiciones ambientales mínimas o, visto desde otro extremo, minimizar los efectos nocivos hacia el medio ambiente, manteniendo el costo dentro de las posibilidades presupuestarias.

Varias investigaciones, en tal sentido, involucran la solución mediante el método de Elementos Finitos (MEF) de las ecuaciones bidimensionales hidrodinámicas para aguas poco profundas y de transporte de sustancias disueltas. Con el objeto de disminuir los tiempos computacionales que demanda la evaluación de las funciones objetivo y sus restricciones, se han desarrollado diversas estrategias. Se describen a continuación algunos de los enfoques previamente desarrollados por los autores ([Stoklas y Cortínez, 2011a,b,c](#)). Entre ellas se ha planteado la utilización de funciones de influencia asociadas al problema Adjunto de transporte de sustancias junto con distintas técnicas de optimización tales como, búsqueda aleatoria, método basado en gradiente y un proceso conocido como “recocido simulado”, aplicado al diseño de descargas de efluentes en ríos, bajo condiciones hidrodinámicas estacionarias. Cuando el cuerpo receptor es un estuario, las condiciones hidrodinámicas cambian ya que presenta un comportamiento inherentemente dinámico (y periódico) debido al efecto de las mareas. Para este caso se ha extendido el enfoque anterior, debiéndose resolver las funciones de influencia mediante una integración temporal hasta determinar sus formas estacionarias ([Cortínez et al. 2016](#)).

También se ha propuesto un enfoque alternativo ([Stoklas et al, 2017](#)) basado en el Método Espectral aplicado a las ecuaciones de dispersión de contaminantes, con el objeto de reducir aún más los tiempos computacionales. Tal enfoque permite obtener directamente la respuesta estacionaria a partir de un sistema de ecuaciones independientes del tiempo.

Sin embargo, cuando el diseño involucra diferentes puntos posibles de descarga, el enfoque previamente descrito puede encarecerse por la necesidad de calcular la ecuación para cada una de estas ubicaciones. En tal sentido, en el presente trabajo, se emplea un desarrollo en series de Fourier sobre el enfoque adjunto del problema de transporte a los efectos de obtener componentes de influencia que, por su independencia temporal, mejoran la velocidad de cómputo. Esto, en combinación con un sencillo método de programación basado en la técnica

de “recocido simulado”, permite no solo establecer la capacidad que debe tener una planta de tratamientos de efluentes, sino que a su vez determina las mejores zonas de descarga que hacen mínima la función de costo de construcción y operación, respetando en simultáneo restricciones ambientales en determinadas áreas de resguardo ambiental.

Los modelos computacionales propuestos se implementan en el programa de Elementos Finitos ([FlexPDE, 2015](#)) en combinación con el ambiente de programación ([Matlab, 2010](#)).

En la sección 2 se presenta el modelo físico matemático para un problema de descarga periódica. Luego en la sección 3 se desarrolla el Método Espectral sobre las ecuaciones adjuntas al problema de transporte. Seguidamente en la sección 4 se describe la formulación matemática del diseño óptimo. En la sección 5 se explica la implementación computacional. En la sección 6 se muestra un ejemplo numérico y finalmente las conclusiones se expresan en la sección 7.

2 MODELO HIDRODINÁMICO Y DE TRANSPORTE PARA UN PROBLEMA DE DESCARGA PERIODICA EN UN ESTUARIO

Se desarrolla a continuación el problema de transporte que permite relacionar los niveles de concentración en cada área durante un período de tiempo, con las corrientes y las descargas de efluentes. Consiste en la formulación de dos modelos matemáticos: el hidrodinámico, para obtener las velocidades de la corriente y el de dispersión, para determinar las concentraciones a partir del conocimiento de las corrientes, del ingreso de contaminantes al cuerpo de agua desde el exterior del sistema y de las reacciones que allí se dan. Considerando las dimensiones habituales de un estuario (donde la profundidad es mucho menor que las horizontales), las mencionadas ecuaciones se formulan de acuerdo a la teoría de aguas poco profundas, es decir mediante un enfoque bidimensional.

Es común asumir que las descargas de efluentes dentro de un estuario tienen un período que es múltiplo del mareal. Por ejemplo, si las descargas tienen periodo diurno se corresponden aproximadamente al doble de una marea M2. El caso que se considera a continuación se refiere al problema de descarga con período mareal en un estuario.

2.1 Modelo Hidrodinámico

La velocidad de las corrientes periódicas en el estuario se obtiene mediante una aproximación basada en el método de perturbación sobre las ecuaciones de aguas poco profundas 2D, junto con sus correspondientes condiciones de borde ([Cortínez et al. 2016](#)). Este método permite formular el problema de naturaleza no lineal como dos problemas lineales consecutivos.

Como generalmente los estuarios son forzados en la boca por una marea semidiurna ($\eta_{\text{ext}} = \eta_0 \cos(\omega t)$), la solución de estos sistemas conduce a la siguiente aproximación:

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_0 + \mathbf{V}_{c1} \cos \omega t + \mathbf{V}_{s1} \sin \omega t + \mathbf{V}_{c2} \cos 2\omega t + \mathbf{V}_{s2} \sin 2\omega t \quad , \quad (1)$$

donde las componentes de la velocidad horizontal V_0 , V_{c1} , V_{s1} , V_{c2} y V_{s2} son funciones de (x,y) y ω es la frecuencia de la marea. Tales ecuaciones fueron resultas mediante el método de elementos finitos ([FlexPDE, 2015](#)).

2.2 Modelo de Dispersión de Contaminantes

La evolución de la concentración de una sustancia en el estuario se puede modelar mediante la siguiente ecuación gobernante bidimensional (promediada según Reynolds):

$$\frac{\partial(CH)}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{V}HC) - \text{div}(KH\nabla C) + C\sigma H = m(x, y, t) \quad , \quad (2)$$

$$-KH \frac{\partial C}{\partial n} \Big|_{BI} = 0 \quad , \quad C \Big|_{BA} = 0 \quad , \quad C(x, y, 0) = C(x, y, T_M) \quad , \quad (3a,b,c)$$

donde \mathbf{V} corresponde a las velocidades horizontales promediadas en la vertical determinadas en (1), $H(x, y)$ la profundidad del estuario, K el coeficiente de dispersión, C la concentración de *Coliformes fecales* (CF), σ la constante de degradación y m es la descarga másica distribuida y se da como la suma de las tasas periódicas de flujo másico (de período mareal) debidas a ND zonas de descarga, cuyas ubicaciones (Fx_j , Fy_j) se encuentran en el área j -ésima.

Se asume como condición de borde que no existe concentración en la boca del estuario y en los márgenes de la costa el flujo de C es nulo (ver Figura 1). Por otra parte, es posible demostrar que cuando la descarga y la velocidad son funciones periódicas, la respuesta estacionaria de la concentración también lo será (Cortínez et al. 2016). En consecuencia, con el afán de obtener directamente tal estado estacionario se formula para este problema la condición de periodicidad (3c), siendo T_M el período mareal.

3 MÉTODO ESPECTRAL APLICADO AL ENFOQUE ADJUNTO DEL PROBLEMA DE TRANSPORTE

Resulta de interés determinar las concentraciones medias espaciales y temporales en determinadas zonas de interés (áreas protegidas) dentro de un estuario, definidas de la siguiente manera:

$$\overline{C_i} = \frac{\int_0^{T_M} \int_{\Omega_i} C d\Omega_i dt}{T_M \Omega_i} \quad , \quad (4)$$

donde T_M corresponde a un período mareal y Ω_i es el área de la zona protegida i -ésima.

Es posible obtener tales valores de manera conveniente, mediante el uso de coeficientes de influencia g_{ij} asociados al problema de transporte (Marchuk, 1986). Tales coeficientes miden el efecto que tiene un flujo unitario de contaminante de la tubería de descarga j sobre cada área protegida i , y su utilización resulta ventajosa al momento de trabajar luego en un procedimiento de optimización.

Los mismos se obtienen a partir de multiplicar a la ecuación de transporte (2) por una función arbitraria G y luego integrarla, con respecto al dominio Ω del estuario y para un período $(0, T_M)$, de la siguiente forma:

$$\int_0^{T_M} \int_{\Omega} G(x, y, t) \left(\frac{\partial(HC)}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{V}HC) - \text{div}(KH\nabla C) + CH\sigma - m \right) d\Omega dt = 0 \quad . \quad (5)$$

Integrando por partes el término temporal y aplicando al resto de los términos las propiedades de integración a partir del teorema de divergencia y de gradiente, se obtiene la siguiente expresión junto con los correspondientes términos de contorno y de periodicidad:

$$\int_0^{T_M} \int_{\Omega} C \left(-H \frac{\partial G}{\partial t} - \mathbf{V}H \cdot \nabla G - \text{div}(KH \nabla G) + GH\sigma \right) d\Omega dt =$$

$$\int_0^{T_M} \int_{\Omega} G m d\Omega dt + \int_{\Omega} (HCG) \Big|_{t=0}^{t=T_M} d\Omega - \int_0^{T_M} \int_{\Gamma} \left(GHCV_n + KH \frac{\partial G}{\partial n} C - GKH \frac{\partial C}{\partial n} \right) d\Gamma dt . \quad (6)$$

A partir de esta expresión, y considerando las condiciones de borde y de periodicidad definidas en (3), la concentración media temporal espacial en la zona protegida i -ésima definida en (4), puede ser expresada de la siguiente manera:

$$\overline{C}_i = \int_0^{T_M} \int_{\Omega} G_i m d\Omega dt , \quad (7)$$

para lo cual se ha requerido que G (o G_i para la zona i), conocida como función de influencia, verifique el siguiente sistema:

$$-H \frac{\partial(G_i)}{\partial t} - \mathbf{V}H \cdot \nabla G_i - \text{div}(KH \nabla G_i) + G_i H \sigma = P_i(x, y, t) , \quad (8)$$

donde

$$P_i = \begin{cases} [T_M \Omega_i]^{-1} & \text{Si } (x, y) \in \Omega_i \\ 0 & \text{Si } (x, y) \notin \Omega_i \end{cases} , \quad (9)$$

$$KH \frac{\partial G_i}{\partial n} \Big|_{BI} = 0 , \quad G_i|_{BA} = 0 , \quad G_i(x, y, 0) = G_i(x, y, T_M) . \quad (10)$$

Finalmente, si se supone que la descarga másica distribuida se da como la suma de las contribuciones debidas a ND zonas de descarga, es posible llegar a la siguiente expresión para la concentración media en las zonas protegidas NP :

$$\overline{C}_i = \sum_{j=1}^{ND} \int_0^{T_M} M_j(t) g_{ij}(t) dt \quad (i=1, 2, \dots, NP) , \quad (11)$$

donde $M_j(t)$ es la tasa de flujo másico, y el coeficiente g_{ij} se define como:

$$g_{ij}(t) = \frac{\int_{\Omega_j} G_i(x, y, t) d\Omega_j}{\Omega_j} , \quad (12)$$

siendo Ω_j el área de descarga del efluente j -ésimo.

Aprovechando la periodicidad que presenta el problema, es posible conocer la concentración media aproximando las funciones de influencia mediante series de Fourier de la siguiente manera:

$$G_i(x, y, t) = G_{0i} + \sum_{r=1}^R \left[G_{cr_i} \cos(r\omega t) + G_{sr_i} \sin(r\omega t) \right] , \quad (r=0, 1, \dots, R) , \quad (13)$$

donde G_{0i} , G_{cr_i} y G_{sr_i} son componentes de influencia de (x, y) que verifican las siguientes

ecuaciones acopladas, siendo R la cantidad total de componentes consideradas en la representación de las funciones periódicas:

$$\begin{aligned} -H\mathbf{V}_0 \cdot \nabla G_{0i} - \operatorname{div}(KH\nabla G_{0i}) + KHG_{0i} &= P_i + \zeta_{0i}(\mathbf{V}_{cr}, \mathbf{V}_{sr}, G_{cr_i}, G_{sr_i}) \\ -\omega HG_{s2_i} - H\mathbf{V}_0 \cdot \nabla G_{c1_i} - \operatorname{div}(KH\nabla G_{c1_i}) + KHG_{c1_i} &= \zeta_{1i}(\mathbf{V}_{cr}, \mathbf{V}_{sr}, G_{0i}, G_{cr_i}, G_{sr_i}) \\ +\omega HG_{c1_i} - H\mathbf{V}_0 \cdot \nabla G_{s2_i} - \operatorname{div}(KH\nabla G_{s2_i}) + KHG_{s2_i} &= \zeta_{2i}(\mathbf{V}_{cr}, \mathbf{V}_{sr}, G_{0i}, G_{cr_i}, G_{sr_i}) \end{aligned} \quad (14)$$

Los términos $\zeta_i(\mathbf{V}_{cr}, \mathbf{V}_{sr}, G_{0i}, G_{cr_i}, G_{sr_i})$ involucran a los productos entre las componentes de las velocidades (1) y las de influencia (13). Debe observarse que la determinación de las funciones de influencia requiere de la solución de este sistema acoplado de ecuaciones independientes del tiempo, el cual insuere un tiempo computacional considerablemente menor, comparado con su determinación a partir de una integración temporal, como se ha realizado previamente en la referencia (Cortínez et al. 2016).

Finalmente, sustituyendo (13) en (12), y el resultado en (11), considerando la periodicidad de la descarga másica, la concentración media de la zona i puede expresarse, después de integrarse en el periodo, de la siguiente manera:

$$\bar{C}_i = \sum_{j=1}^{ND} \frac{\pi}{\omega} \left(2M_{0j} g_{0ij} + \sum_{r=1}^R [M_{cr_j} g_{cr_{ij}} + M_{sr_j} g_{sr_{ij}}] \right) \quad (i=1, 2, \dots, NP), \quad (15)$$

donde M_{0j} , M_{cr_j} y M_{sr_j} son constantes y g_{0ij} , $g_{cr_{ij}}$ y $g_{sr_{ij}}$ son componentes de los coeficientes de influencia evaluados en la j -ésima descarga, de acuerdo a lo definido en (12).

4 PROBLEMA DE DISEÑO ÓPTIMO

Se considera, a manera de ejemplo, una situación de diseño de ND plantas depuradoras de aguas residuales que deben descargar efluentes urbanos provenientes de ciudades aledañas con valores de concentración de CF . Se asume que con tales niveles, las concentraciones medias temporales en determinadas zonas de resguardo ambiental en un ciclo de marea, exceden los parámetros de admisibilidad de CF .

Tal problema puede ser formulado matemáticamente de la siguiente manera:

$$\text{Minimizar} \quad FO = FO(\beta_1(t), \beta_2(t), \dots, \beta_{ND}(t), \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_N), \quad (16)$$

$$\text{sujeto a} \quad \bar{C}_i < C_{adm} \quad (i=1, 2, \dots, NP), \quad (17)$$

siendo $\beta_j(t)$ funciones periódicas (período T_M) de reducción en las tasas de vertido y varían entre 0 (reducción máxima) y 1 (reducción mínima). Consecuentemente, las descargas volumétricas residuales (sin purificar) vendrán dadas por $\beta_j Q_j$, representando este último al caudal máximo de aguas servidas que llega a cada planta. Por otra parte, ψ_1, ψ_2 , son otras variables de diseño que pueden afectar el costo, C_i la concentración de *Coliformes fecales* en la zona protegida i -ésima, y C_{adm} corresponde al nivel permitido de tal indicador.

La forma de la función de costo FO dependerá de aspectos específicos, tales como: costos de operación, de construcción, financieros, etc. Algunos ejemplos pueden ser

consultados en las referencias ([Cortínez et al. 2016](#); [Giles, 1995](#) y [Smith, 1999](#)).

5 IMPLEMENTACIÓN COMPUTACIONAL Y MÉTODO DE SOLUCIÓN

Para resolver el problema de diseño planteado, es necesario determinar las concentraciones en las zonas de interés. Para ello deben resolverse dos modelos computacionales mediante el método de los elementos finitos. El primero de ellos consiste en determinar las corrientes de marea, con sus correspondientes condiciones de borde, a partir de (1). Una vez determinadas se resuelve el problema de dispersión a los efectos de evaluar tales restricciones. De esta forma el problema se reduce a un proceso de búsqueda de las variables de diseño $\beta_j(t)$, ψ_N , Fx_j y Fy_j , evaluando en cada caso la función objetivo generalizada, dada por (16). Es claro que las variables óptimas serán aquellas que minimicen tal función. Empleando un ambiente de programación en Matlab este problema puede ser resuelto de varias maneras. La primera corresponde a la simulación del problema directo de transporte (2-3) de forma repetida para cada alternativa de diseño, verificando el cumplimiento de las restricciones del problema (17) y comparando la función objetivo (16) hasta encontrar la mejor opción. Este procedimiento implica un elevado costo computacional debido a su dependencia temporal.

La forma que se emplea en el presente trabajo, consiste en determinar las restricciones del problema mediante el uso de las componentes de los coeficientes de influencia, obtenidas convenientemente a partir de la resolución del sistema adjunto del modelo de transporte definido en (14). Debe observarse que este sistema se resuelve una única vez para cada zona protegida. Una vez conseguidas, las concentraciones medias en las áreas de resguardo ambiental son calculadas con la expresión (15). El proceso de búsqueda de las variables óptimas se realiza mediante el Método de Recocido Simulado ([Stoklas y Cortínez, 2011a](#)).

6 EJEMPLO NUMÉRICO

Se considera una situación de diseño de ND plantas depuradoras de aguas residuales que, mediante emisarios submarinos, deben descargar efluentes urbanos provenientes de ciudades aledañas con valores de concentración de CF de 8×10^7 y 6×10^7 NMP/100ml* m³/s respectivamente (ver [Figura 1](#)). Con tales niveles, las concentraciones medias temporales en determinadas zonas de resguardo ambiental Z_i ($i=1,2,3$) en un ciclo de marea, exceden los parámetros de admisibilidad de CF , fijados en 2000 NMP/100ml.

Se desea reducir la carga contaminante mediante la construcción de plantas de tratamiento al menor costo posible. Para ello es necesario determinar la ubicación de las salidas de tuberías de descarga y las capacidades de tratamiento de cada efluente a los efectos de minimizar los costos de construcción y operación procurando, asimismo, que tales concentraciones se encuentren dentro de los valores permitidos.

Los costos están directamente relacionados al sistema de depuración que se pretenda implementar, los cuales dependen de varios factores, en particular del volumen de caudal a tratar, así como a los costos de construcción de las tuberías de descargas que pueden suponerse proporcionales a su longitud. Se plantea en este trabajo la siguiente función de costo (mayores detalles pueden consultarse en [Friedler y Pisanty \(2006\)](#) y [Salas \(2000\)](#)):

$$CT_j = \frac{8988}{(1-r)vu} QT_j^s + \frac{k}{vu} \sqrt{(x_j - Fx_j)^2 + (y_j - Fy_j)^2} \quad , \quad (18)$$

siendo k el costo por metro construido de tubería [US\$/m], Fx_j y Fy_j las coordenadas de descarga de efluentes y x_j e y_j las coordenadas de las plantas de tratamiento. Por otra parte r es una función (adimensional) de la capacidad de la planta QT_j [m³/día] que puede expresarse de la siguiente manera:

$$r = 0.352 + 6.557 \times 10^{-6} QT_j - 6.429 \times 10^{-11} QT_j^2 \quad (19)$$

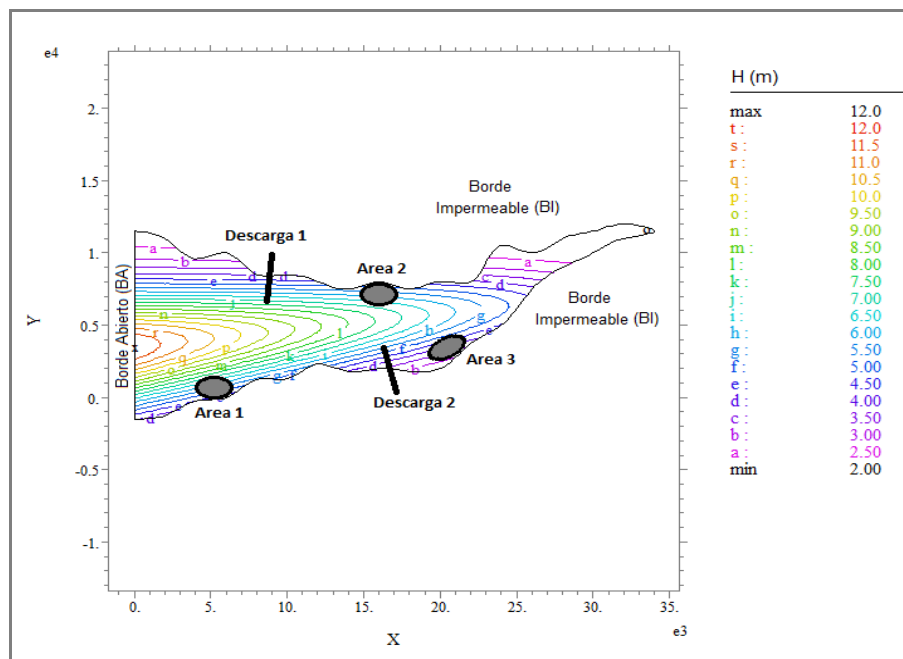


Figura 1: Estuario y batimetría bajo análisis.

A efectos de determinar QT_j , debe considerarse que las aguas tratadas se consideran purificadas, es decir con contaminación residual despreciable. Sin embargo, el caudal de aguas servidas en exceso a la capacidad de tratamiento se deriva sin ser tratada. Tal esquema de diseño es el adoptado y se puede observar en la Figura 2.

Si se denomina Q_j al caudal máximo de aguas servidas que llega a la planta j -ésima, y QT_j su capacidad, el caudal que se descarga sin tratar al curso de agua se formula como $(Q_j - QT_j)$. Es posible expresar la capacidad de tratamiento (QT_j) de cada planta como:

$$QT_j = Q_j (1 - \beta_j) \quad j = 1, 2, \dots, ND \quad (20)$$

Observar que en este caso los valores de β_j son constantes, recordando que $(1 - \beta_j)$ indica el grado de purificación de la planta.

Entonces, en el problema considerado las variables de diseño corresponden a los factores β_j , así como a las variables adicionales ψ_N que en este caso corresponden a las coordenadas de descarga de las tuberías (Fx_j , Fy_j). Luego la función objetivo a minimizar viene dada por:

$$\text{Minimizar} \quad FO = \sum_{j=1}^{ND} CT_j \quad (21)$$

además de la restricción ambiental (17) las variables de diseño deben estar sujetas a:

$$0 \leq \beta_j \leq 1, \quad (Fx_j, Fy_j) \in R_j, \quad (22)$$

donde R_j es el área posible de descarga para la tubería j -ésima.

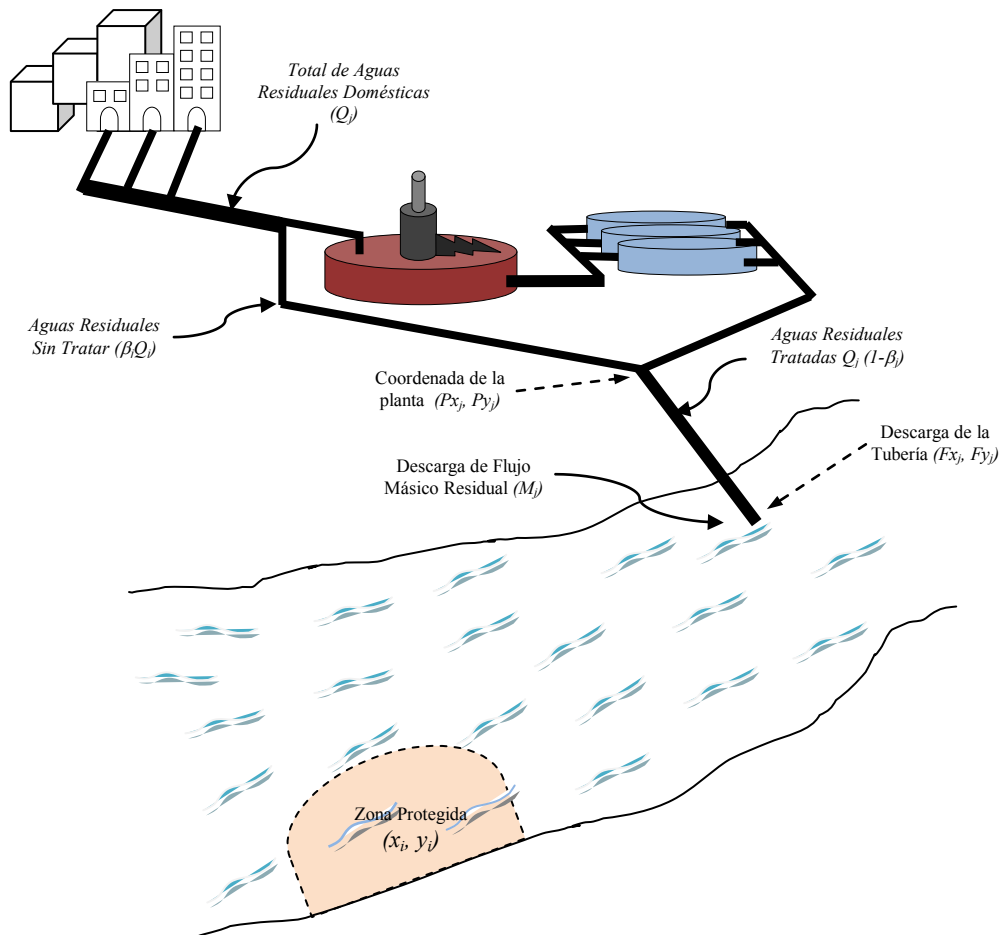


Figura 2: Esquema de diseño de planta y capacidad de tratamiento.

Para el problema de diseño planteado, se muestran los resultados obtenidos con la solución del problema directo de transporte mediante el MEF. En la [Figura 3](#) se observa la distribución de CF generada por la descarga de efluentes, indicados con cruces negras, donde los niveles de concentración media temporal en las tres zonas protegidas (3321, 4571 y 4000 NMP/100ml respectivamente) indicadas con círculos negros, superan los valores de admisibilidad. Los resultados obtenidos ponen de manifiesto la necesidad de implementar plantas de tratamiento adecuadamente diseñadas.

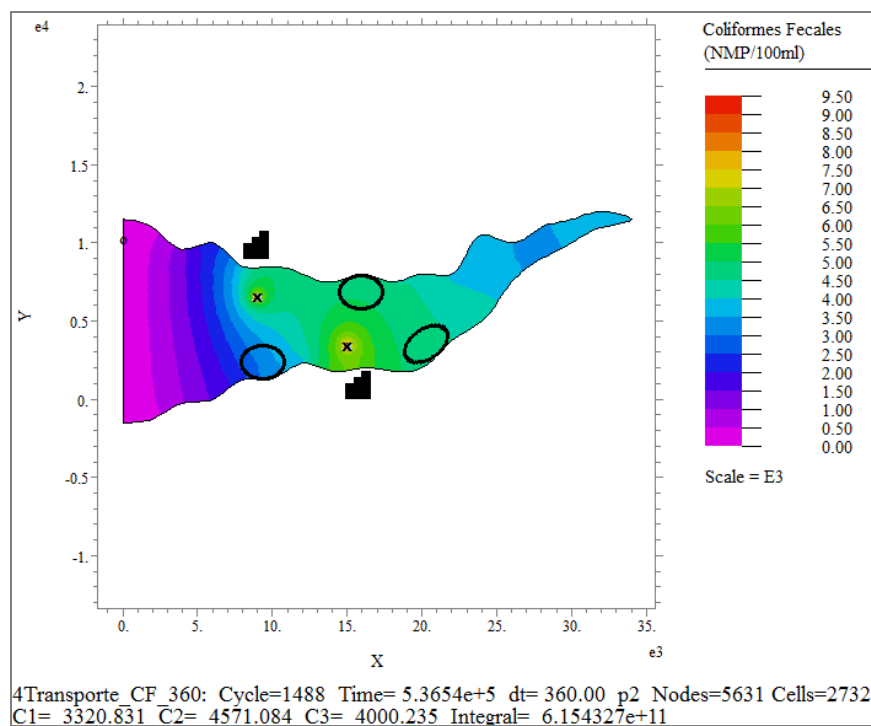


Figura 3: Niveles de Concentración de CF en el Estuario (condición inicial).

A continuación se resuelve el mismo problema, a partir del enfoque propuesto. Es decir se obtienen las componentes de las funciones de influencia mediante la solución del sistema (14) y finalmente se obtienen las concentraciones medias en las zonas de interés a partir de la expresión (15). En la Tabla 1 se puede observar una comparación entre los valores de tales concentraciones en las zonas protegidas, obtenidos con el método directo y con el enfoque propuesto, donde se observa que la diferencia de error porcentual es del orden del 1%, siendo para cada zona de 0.6%, 1% y 1.1% respectivamente.

Es de interés remarcar que con el modelo directo de transporte de contaminantes, el tiempo computacional requerido para obtener la concentración en cada zona protegida resultará ser muy elevado, ya que el cálculo de la evolución hasta obtener el estado oscilatorio estacionario, para el ejemplo bajo análisis, demora aproximadamente 80 minutos. En cambio, el tiempo total requerido utilizando la solución del problema adjunto mediante el enfoque de Fourier es de 9 minutos, es decir aproximadamente 10 veces menor.

Tal ventaja será de mayor importancia para la resolución del problema completo de diseño óptimo, que puede requerir cientos de simulaciones de escenarios posibles. Vale decir que la utilización del problema directo requerirá un tiempo computacional igual al producto de las iteraciones por el tiempo de cálculo informado, mientras que el enfoque propuesto será poco más de 9 minutos, donde una vez obtenidas las componentes de influencia, la determinación de las restricciones es prácticamente instantánea.

		Problema Directo de Transporte	Método Espectral sobre el Modelo Adjunto
Concentración media temporal de Coliformes Fecales (NMP/100ml)	Zona 1	3321	3339
	Zona 2	4571	4615
	Zona 3	4000	4044

Tabla 1: Comparación entre valores de concentraciones medias en zonas protegidas (condición inicial).

Una vez comprobada la precisión del enfoque propuesto, se desarrolló el ejemplo de diseño óptimo explicado. En la [Tabla 2](#) figuran los valores de las variables de diseño óptimas (factores de reducción y coordenadas de descarga de cada planta depuradora) que hacen mínima la función de costo. El tiempo total de cálculo del proceso de optimización para 500 iteraciones fue de 10 minutos.

		Valores óptimos
Factores de reducción de las plantas de tratamiento	$\beta 1$	0.89
	$\beta 2$	0.24
Factores de reducción de las plantas de tratamiento (m)	L 1	1044
	L 2	1676
Nivel de concentración en zona protegida (NMP/100ml)	C 1	1943
	C 2	1967
	C 3	1628
Costo Total Anual (US\$/Año)	CT	1.964.618

Tabla 2: Resultados de la optimización.

En la [Figura 4](#) se observa el comportamiento de la Función Objetivo (FO_{min}) durante el proceso de búsqueda de las variables óptimas, donde es posible notar, que el valor mínimo obtenido en cada iteración se va almacenando. Sin embargo, cuando la función objetivo empeora (aumenta) la solución puede ser aceptada (FO_{actual}) si cumple con cierta probabilidad. Este último paso es el que impide que la búsqueda quede atrapada en un mínimo local. Por supuesto como tal probabilidad se reduce con el transcurso de las iteraciones, las excursiones ascendentes van disminuyendo, lo que asegura que luego de un número de iteraciones adecuado la búsqueda se dirija hacia un mínimo local, presumiblemente coincidente (o cercano al global).

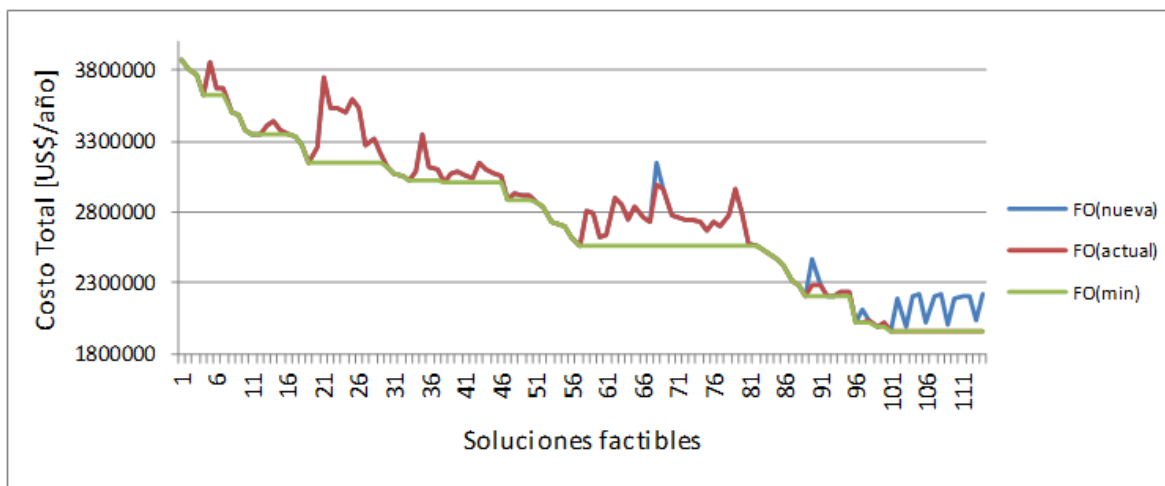


Figura 4: Evolución de la Función Objetivo durante el proceso de optimización.

En las [Figuras 5](#), [6](#) y [7](#) se comparan las historias temporales de concentración simuladas con los valores óptimos indicados en la [Tabla 2](#). En ellas es posible ver que la media temporal en cada zona, calculada con las componentes de los coeficientes de influencia, coincide con la media temporal calculada con el problema de transporte directo.

Se observa que después de un transitorio se alcanza una situación de oscilación estacionaria, que es la que tiene interés analizar, donde los valores medios obtenidos no

superan la restricción de concentración admisible fijada en 2000 NMP/100ml de CF. Sin embargo, si se desea mantener valores máximos por debajo de C_{adm} , deben considerarse valores límites de mayor restricción. De esta forma es posible garantizar que los niveles de concentración se encuentren dentro de los límites aceptables durante todo un período de marea.

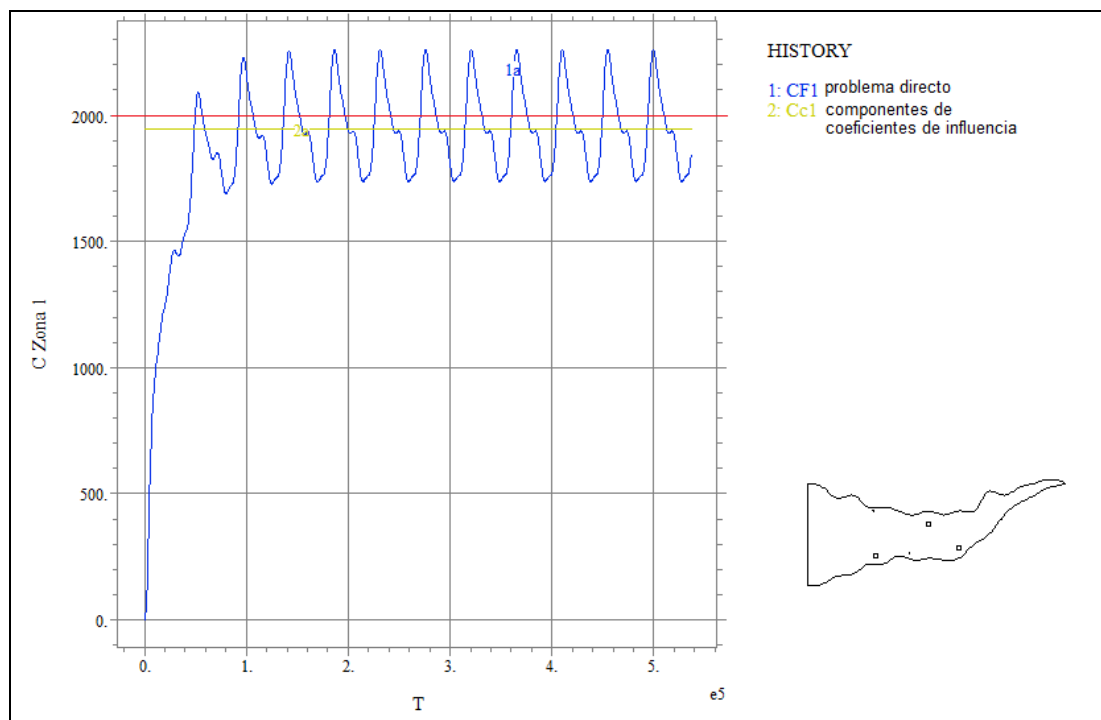


Figura 5: Niveles de Concentración de CF en zona 1 (situación óptima).

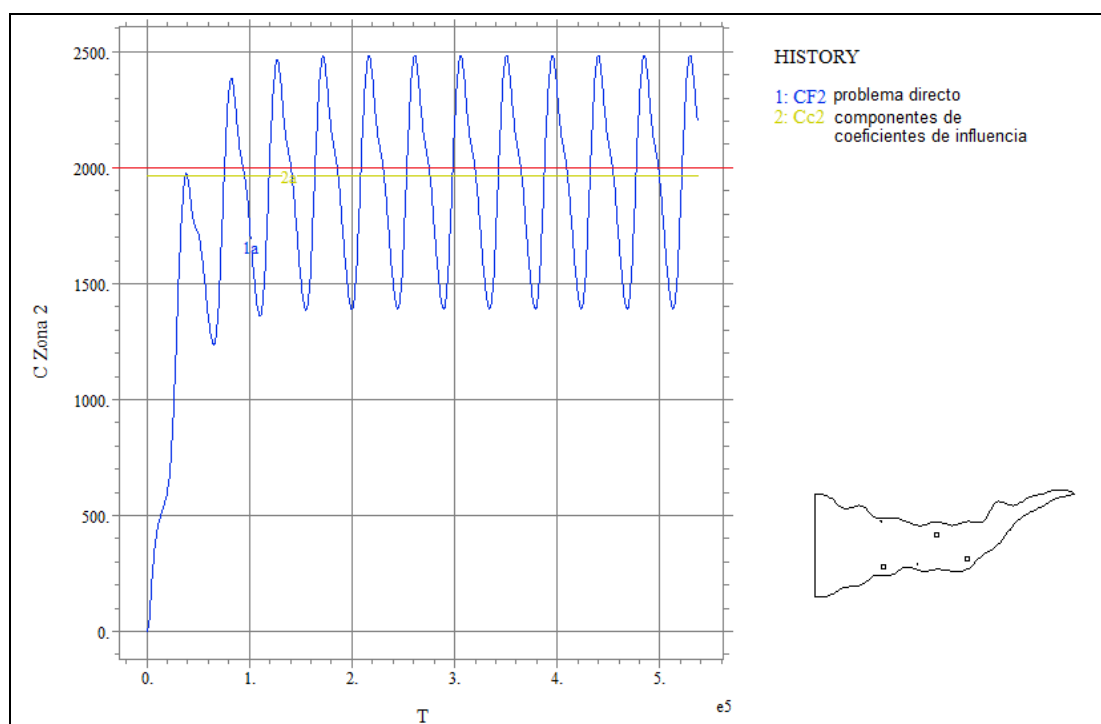


Figura 6: Niveles de Concentración de CF en zona 2 (situación óptima).

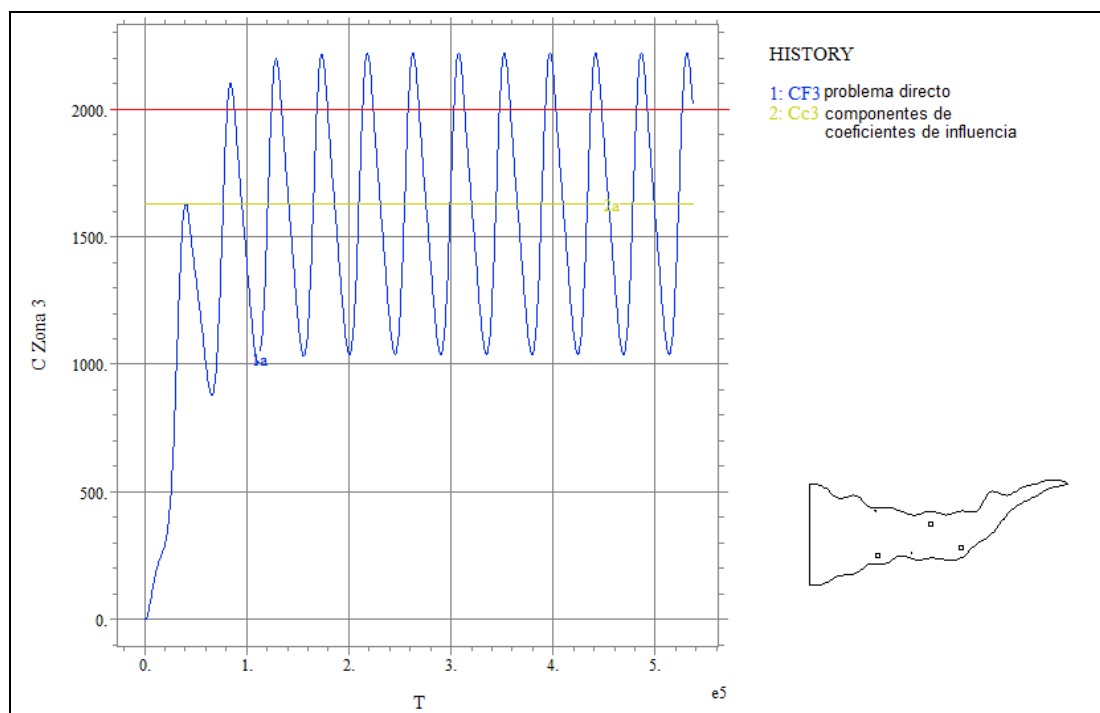


Figura 7: Niveles de Concentración de CF en zona 3 (situación óptima).

7 CONCLUSIONES

Se desarrolló un modelo computacional para el diseño óptimo de descargas de efluentes urbanos dentro en un cuerpo de agua dominado por mareas. Dicha metodología permitió determinar las ubicaciones de las descargas así como el grado de depuración a un costo de inversión y operación mínimo, respetando las restricciones ambientales fijadas.

A diferencia de trabajos anteriores, presentados por los autores, la metodología se basó en la obtención de componentes de Fourier de coeficientes de influencia a partir del problema adjunto de transporte de sustancias disueltas mediante el MEF. De esta manera se logró reducir notablemente los tiempos de cálculo computacional que demanda calcular la concentración media temporal.

Tal enfoque ha sido combinado con la técnica de “recocido simulado” para la búsqueda de las variables de diseño que hacen mínima la función objetivo.

Se ha demostrado que esta metodología se comporta muy eficientemente, y puede ser fácilmente extendido para la consideración de un mayor número de zonas protegidas, de descargas e indicadores ambientales, así como para otro tipo de problemas de diseño óptimo y control en estuarios.

AGRADECIMIENTOS

La presente investigación se ha realizado en el marco del proyecto “Modelos matemáticos en Ingeniería Ambiental: Diseño Óptimo y Control” (CIMTA, Universidad Tecnológica Nacional). Asimismo forma parte del trabajo de tesis desarrollado por C.I. Stoklas, bajo la dirección del Dr. V.H. Cortínez, para obtener el título de Dr. en Ingeniería en la Facultad Regional de Bahía Blanca de la Universidad Tecnológica Nacional.

REFERENCIAS

- Cortínez V.H., Stoklas C.I. y Dominguez P.N., Control óptimo de vertidos industriales o urbanos en estuarios dominados por mareas. *Mecánica computacional*, 34:3223-3236, 2016.
- FlexPDE PDE Solutions Inc. www.pdesolutions.com, 2015.
- Friedler, E. y Pisanty, E. Effects of design flow and treatment level on construction and operation costs of municipal wastewater treatment plants and their implications on policy marking. *Water Research*. 40:3751-3758, 2006.
- Giles R.T. Optimal strategies for discharging pollutants into narrow estuaries. *Water Research* 29:563-569. 1995.
- Kirkpatrick, S. Gelatt, C. D. y Vecchi, M. P. *Optimization by Simulated Annealing*. Vol. 220, N°4598, 1983.
- Marchuk, G. I. *Mathematical Models in Environmental Problems*. North Holland, 1986.
- Matlab R2010a. The Math Works, Inc. (www.mathworks.com), 2010.
- Salas, H. J. Emisarios submarinos, enfoque general, conceptos básicos de diseño. OPS/CEPIS/PUB/ 00.52, 2000.
- Smith R. y Purnama A. Two outfalls in an estuary: Optimal wasteload allocation. *Journal of Engineering Mathematics*. 35: 273–283, 1999.
- Stoklas C.I.y Cortínez V.H. Un enfoque de optimización para el control de vertido de efluentes urbanos en ríos. *Mecánica Computacional*. 30:3577-3594. ISSN: 1666-6070. 2011a.
- Stoklas C.I.y Cortínez V.H. Un Modelo Computacional para el Estudio de Contaminación en Cuerpos de Aguas Poco Profundas. *Contaminación Atmosférica e Hídrica en Argentina*. 1:523-532. ISBN: 978-950-42-0136-6. 2011b.
- Stoklas C.I.y Cortínez V.H. Diseño Óptimo de Plantas de Tratamiento de Aguas Residuales. *Matemática Aplicada, Computacional e Industrial*. 3:327-330. ISSN 2314-3282. 2011c.
- Stoklas C.I., Cortínez V.H. y Dominguez P.N., Optimización de la calidad del agua en estuarios: aplicación del método espectral. *Contaminación Atmosférica e Hídrica en Argentina*. Trabajo aceptado. 2017.